تحليل عقدي ١
السنة الثالثة / ف ١
2017 - 10 - 17
المحاضرة الأولى
كلية العلوم
قسم الرياضيات
نظري

الفصل الثاني: دوال المتغير العقدي

• تعريف:
لتكن S مجموعة من نقاط المستوي العقدي وليكن Z متغير عقدي يأخذ أي قيمة من هذه المجموعة ولنفرض أنه يقابل كل قيمة لـ Z من S توجد قيمة للمتغير W من المجموعة S' وفق قاعدة الربط $W = f(Z)$

ندعو في هذه الحالة Z بالمتغير المستقل وندعو W بالمتغير التابع
بينما $W = f(Z)$ دالة متغير عقدي أو تابع عقدي
وندعو S مجموعة تعريف (منطلق التابع)
وندعو S' مستقر الدالة أو مجموعة قيم التابع $W = f(Z)$

• في الساحة العقدية نصادف نوعان من الدوال:
النوع الأول: دوال وحيدة القيمة أو وحيدة الفرع
مثال: الدالة:

$$f(z) = z^2 \quad 1$$

النوع الثاني: دالة متعددة القيم أو متعددة الفروع

مثال: الدالة

$$w = z^{\frac{1}{3}}$$

هي دالة متعددة القيم لأنه مقابل كل قيمة لـ z يوجد ثلاث قيم للمتغير w

ملاحظة:

عندما نكتب لفظ دالة متغيرة عقدية نعني بذلك الدالة وحيدة القيمة فيما عدا ذلك ننوه إلى أن الدالة متعددة القيم

- نفرض أن z تساوي $z = x + iy$ و

$$w = u + iv$$

$$w = f(z)$$

$$u + iv = f(x + iy)$$

هنا يعني أن كل من v و u متعلقة بالمتغيرين x و y

مثال:

$$f(z) = z^2$$

$$w = u + iv$$

$$z = x + iy$$

حمص / النفق الرئيسي لجامعة البعث / ١٥ اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات

$\Rightarrow u + iv = x^2 - y^2 + 2ixy$

أي أن

$u = u(x, y) = x^2 - y^2$

$v = v(x, y) = 2xy$

لذلك أي دالة متغير عقدي يمكن التعبير عنها بدالتين حقيقيتين بالشكل:

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) \quad \text{②}$$

• ونسمي $u = u(x, y)$ بالقسم الحقيقي للدالة المتغير العقدي $f(z)$

ونعبر عن ذلك بـ $Re\, f(z) = u(x, y)$

• ونسمي $v = v(x, y)$ بالقسم التخيلي للدالة المتغير العقدي $f(z)$

ونعبر عن ذلك $Im\, f(z) = v(x, y)$

• وإذا كانت لدينا دالتين حقيقيتين باستخدام العلاقة ① يمكن أن نعرف من خلالها دالة متغير عقدي

• في الحالة التي يكون فيها $v(x, y) = 0$ يصبح لدينا

$$f(z) = u(x, \;)$$

وتسمى هذه الحالة دالة متغير عقدي ذات قيم حقيقية

مثال: $f(z) = |z|^2$

نفرض أن $z = x + iy \Leftarrow$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|z|^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow f(z) = x^2 + y^2$

$Re\, f(z) = x^2 + y^2$

$Im\, f(z) = 0$

• مجموعة التعريف لأي دالة عقدية متغير إذا لم تكن معطاة نعرفها كما يلي:
أكبر مجموعة جزئية من C بحيث تكون كل نقطة منها صورة ذات قيمة محددة

مثال: الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$
ومجموعة تعريفها $C \setminus \{0\}$

• مجموعة تعريف دوال كثيرات الحدود بالمستوي العقدي أكمله:
إذا كانت الدالة $f(z)$ من الشكل:

دالة كسرية $f(z) = \frac{P(z)}{q(z)}$

حمص / النفق الرئيسي لجامعة البعث /
اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
-2-

عندئذ يمكننا تعريف هذه الدالة التحليلية على جميع نقاط المستوي العقدي باستثناء النقاط التي تعدم المقام

• النهايات :

تعريف :

لتكن $w = f(z)$ دالة متغير عقدي ولنقول عن العدد العقدي w أنه نهاية هذه الدالة عندما تسعى z نحو z_0 إذا وفقط إذا كان :

من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$0 < |z - z_0| < \delta$ عندما $|f(z) - w| < \varepsilon$

ونعبر عن ذلك بالشكل : $\lim_{z \to z_0} f(z) = w$

ملاحظة :

نعلم أنه في الساحة الحقيقية فإن المتغير الحقيقي x يمكن ان يسعى نحو x_0 وفق طريقتين مختلفتين (من اليمين أو من اليسار) أو (القيم أكبر أو أصغر)

بينما في الساحة العقدية فإن المتغير z يسعى نحو z_0 لعدد كبير منه

فنقول بأن النهاية غير موجودة

• في المستوي الحقيقي تختلف النهايات باختلاف الطريقة و
إذا اختلفت قيمة النهاية إذا اختلفت النهاية
كذلك في المستوي العقدي إذا اختلفت النهايات
باختلاف الطريقة عندئذ تكون النهاية غير موجودة

• في المستوي الحقيقي إذا كانت النهاية من اليسار
تساوي قيمة النهاية من اليمين يقال أن النهاية
موجودة
بينما في المستوي العقدي إذا تساوت النهاية
وفق طريقين مختلفين ليس بالضرورة أن تكون
النهاية موجودة لأن قد تكون هناك طريق آخر
تختلف قيمة النهاية وفق هذا الطريق

مثال: أثبت أن

$$\lim_{z \to i} \frac{iz}{5} = \frac{-1}{5}$$

الحل:

لإثبات ذلك علينا أن نثبت أنه من أجل $\varepsilon > 0$
يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $\left| \frac{iz}{5} - \left(\frac{-1}{5}\right) \right| < \varepsilon$

طالما أن $\delta > |z - i| > 0$

$$\left| \frac{iz}{5} - \frac{(i^2)}{5} \right| = \left| \frac{iz - i^2}{5} \right|$$

$$= \left|\frac{i(z-i)}{5}\right| = \frac{|i(z-i)|}{5}$$

$$= \frac{|i|\,|z-i|}{5} = \frac{|z-i|}{5}$$

$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$

ويكون الطرف الأيسر أصغر من ع
إذا ضغطنا إذا كان $|z-i| < 5\varepsilon$
من هنا نستنتج أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد
$0 < \delta = 5\varepsilon$
حيث أن:

$$\lim_{z \to i} \frac{iz}{5} = \frac{-1}{5}$$

مثال 2
لتكن لدينا الدالة:

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$$

إذا أردنا كتابتها بالشكل:
$u + iv$

الحل:

$$\frac{x-iy}{x+iy} \cdot \frac{(x-iy)}{(x-iy)}$$

$$= \frac{x^2 - y - 2ixy}{x^2+y^2}$$

$$= \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{u} - i\underbrace{\frac{2xy}{x^2+y^2}}_{v}$$

اثبت ان نهاية التابع غير موجودة عندما Z تسعى نحو الصفر على المحورين

$$\lim_{Z \to 0} \frac{\bar{Z}}{Z}$$

لنحسب قيمة هذه النهاية وفق طريقين مختلفين

الطريقة الأولى المحور الحقيقي عندئذ

$$Z = x \Leftarrow \bar{Z} = x$$

$$\lim_{Z \to 0} \frac{\bar{Z}}{Z} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

لنحسب قيمة النهاية على المحور التخيلي

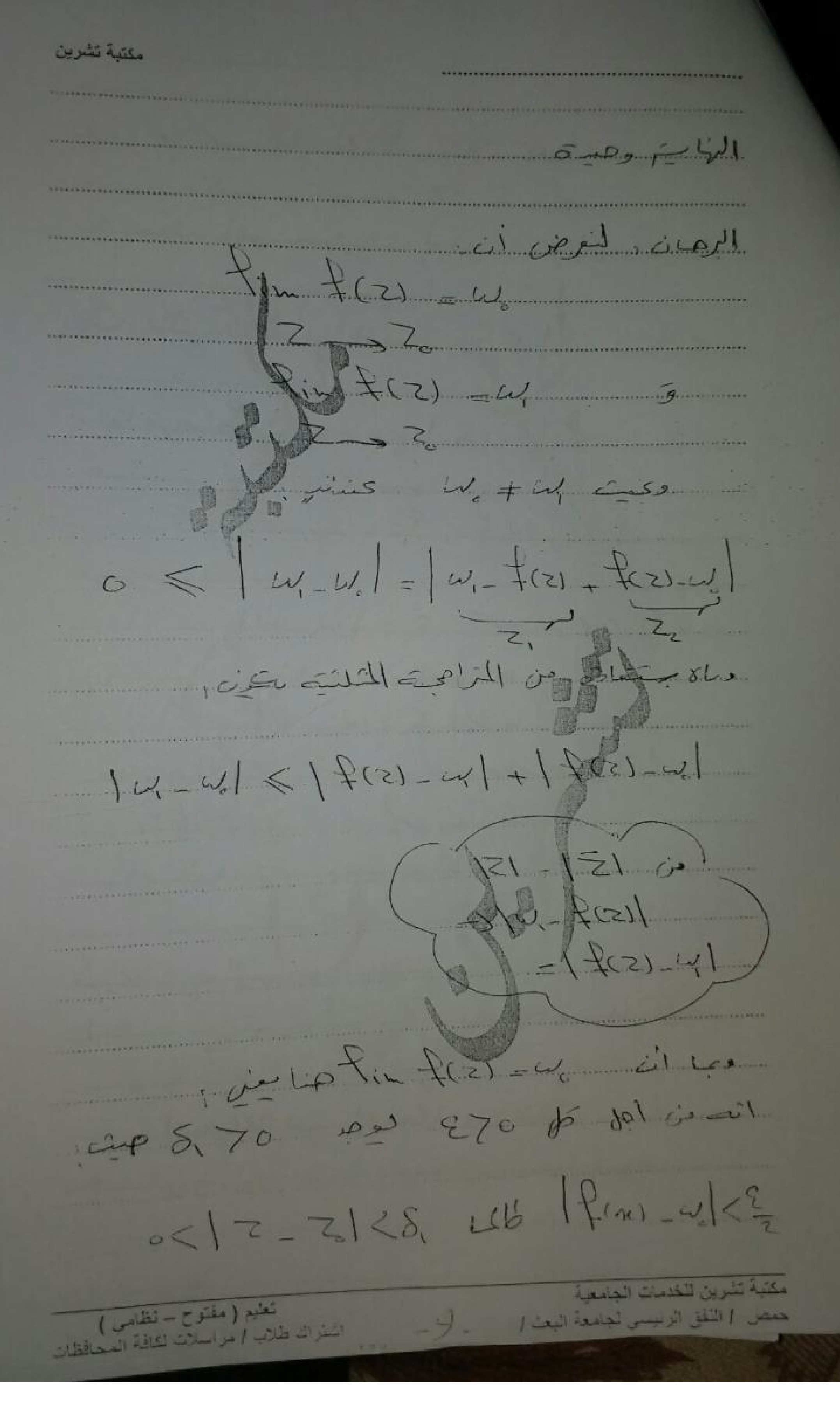
$$Z = iy \Leftarrow \bar{Z} = -iy$$

$$\Rightarrow \lim_{Z \to 0} \frac{\bar{Z}}{Z} = \lim_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

بما أن قيمة النهاية اختلفت باختلاف الطريقة عندئذ النهاية غير موجودة

مبرهنة (1):

اذا كانت الدالة $f(z)$ لها نهاية عند z_0 فهذه



النهاية وحيدة

البرهان: لنفرض أن

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

و

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1$$

وحيث $w_0 \neq w_1$ عندئذٍ

$$0 \leq |w_1 - w_0| = |\underbrace{w_1 - f(z)}_{z_1} + \underbrace{f(z) - w_0}_{z_2}|$$

وبالاستفادة من المتراجحة المثلثية نجد:

$$|w_1 - w_0| \leq |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1|$$

من $|z| = |-z|$

$|w_1 - f(z)| = |f(z) - w_1|$

وبما أن $\lim f(z) = w_0$ هذا يعني:

أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ حيث:

$|f(z) - w_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ طالما $0 < |z - z_0| < \delta_1$

وعلماً أن: $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$ هذا يعني

أنه من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$|f(z) - w_1| < \varepsilon$ طالما $0 < |z - z_0| < \delta_1$

وإذا فرضنا أن: $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

عندئذٍ:

$$|w_1 - w_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ولنفرض أن:

$|w_1 - w_2| = \varepsilon$ تصبح المتراجحة الأخيرة:

$$|w_1 - w_2| < |w_1 - w_2|$$

وهذه النتيجة غير معقولة لذلك الفرض الجدلي

فاطل $\Leftarrow$ $w_1 = w_2$

أي النهاية وحيدة إن وجدت

مبرهنة 2:

ليكن $z_0 = x_0 + iy_0$ و $w_0 = u_0 + iv_0$ ولـ

و:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

عندئذٍ:

① $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

إذا وفقط إذا كانت

② $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$

$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

البرهان:

$(1) \Leftarrow (2)$

بما أن (1) محققة فهذا يعني أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن:

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

طالما أن $0 < |z - z_0| < \delta$

أي أن:

$$|u(x,y) + i\,v(x,y) - u_0 - i v_0| < \varepsilon$$

طالما أن:

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

أي أن:

$$|u(x,y) - u_0 + i\,(v(x,y) - v_0)| < \varepsilon$$

فإن: $0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$

ولكن نعلم أن: $|Re Z| \le |Z|$, $|Im Z| \le |Z|$

وباستفادة من هذا نجد أن:

$$|u(x,y)-u_0| \le |u(x,y)-u_0 + i(v(x,y)-v_0)| < \varepsilon$$

طالما أن:

$$0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$$

و

$$|v(x,y)-v_0| \le |u(x,y)-u_0 + i(v(x,y)-v_0)| < \varepsilon$$

طالما أن:

$$0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$$

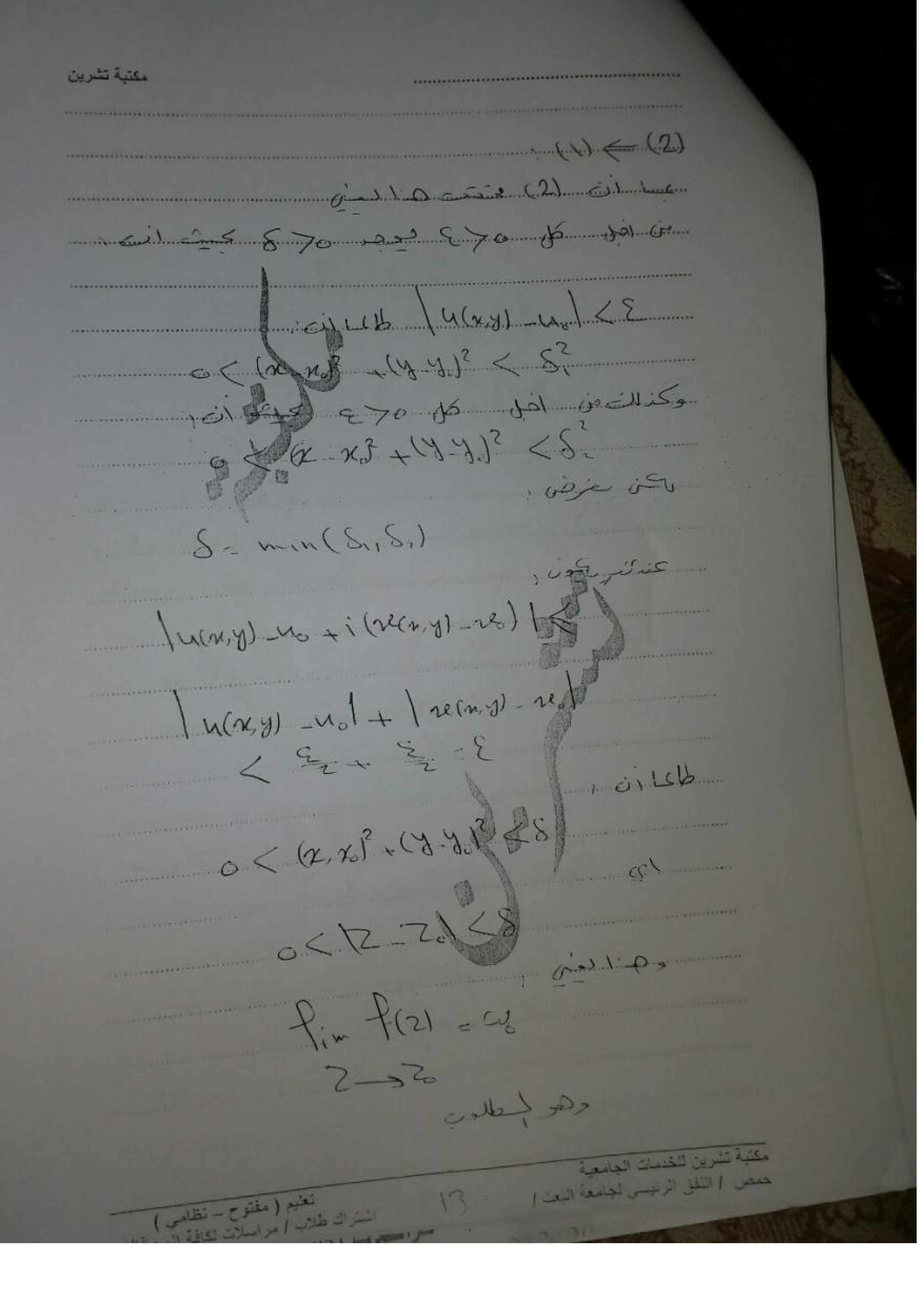
ومن هنا نستنتج أن:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$$

و

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

وهو المطلوب.



(2) $\Leftarrow$ (1)

حسباً ان (2) محققة هذا يعني

من اجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث انه

$$|u(x,y) - u_0| < \varepsilon$$ طالما:

$$0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta_1^2$$

وكذلك من اجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد ان

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta_2^2$$

لكن نفرض:

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

عندئذ يكون:

$$|u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)| \le |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

طالما ان:

$$0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$$

اي

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

وهذا يعني:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

وهو المطلوب

تمرين (1):

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

$$\lim_{z \to i} f(z) = ?$$

الحل:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3 - 3xy^2 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} 3x^2y - y^3 = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to i} f(z) = 0 + i(-1)$$

$$= -i$$

تمرين (2):

$$f(z) = \frac{\sin x}{x} + i\,\frac{y-1}{y+1}$$

احسب:

$$\lim_{z \to i} f(z) = ?$$

الحل:

الحل:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{y \to 1} \frac{y-1}{y+1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to 1} f(z) = 1 + i \cdot 0 = 1$$

// مبرهنة:

إذا كانت $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$

و $\lim_{z \to z_0} g(z) = W_0$

عندئذ:

① $\lim_{z \to z_0} (g(z) \mp f(z)) = W_0 \mp w_0$

② $\lim_{z \to z_0} (f(z) \, g(z)) = w_0 W_0$

③ $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{W_0} \qquad W_0 \neq 0$

④ $\lim_{z \to z_0} c = c$

حيث c ثابت عددي

⑤ $\lim_{z \to z_0} z = z_0$

⑥ $\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n$

• من هذه القواعد نستنتج أن :

اذا كانت

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ كثيرة حدود

من الدرجة n نستكون نهايتها :

$$\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0)$$

مثال :

$$\lim_{z \to 1} z^3 - 1 = 0$$

• اذا كانت $w_0 = \infty$ أو $z_0 = \infty$ أو

$z_0 = w_0 = \infty$

في هذه الحالة

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$$

هذا يعني أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه:

$|f(z) - \omega| < \varepsilon$ طالما أن $|z| > \frac{1}{\delta}$

• بشكل مشابه إذا كان:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

هذا يعني أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$ طالما $0 < |z - z_0| < \delta$

• إذا كان $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$

يعني أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث:

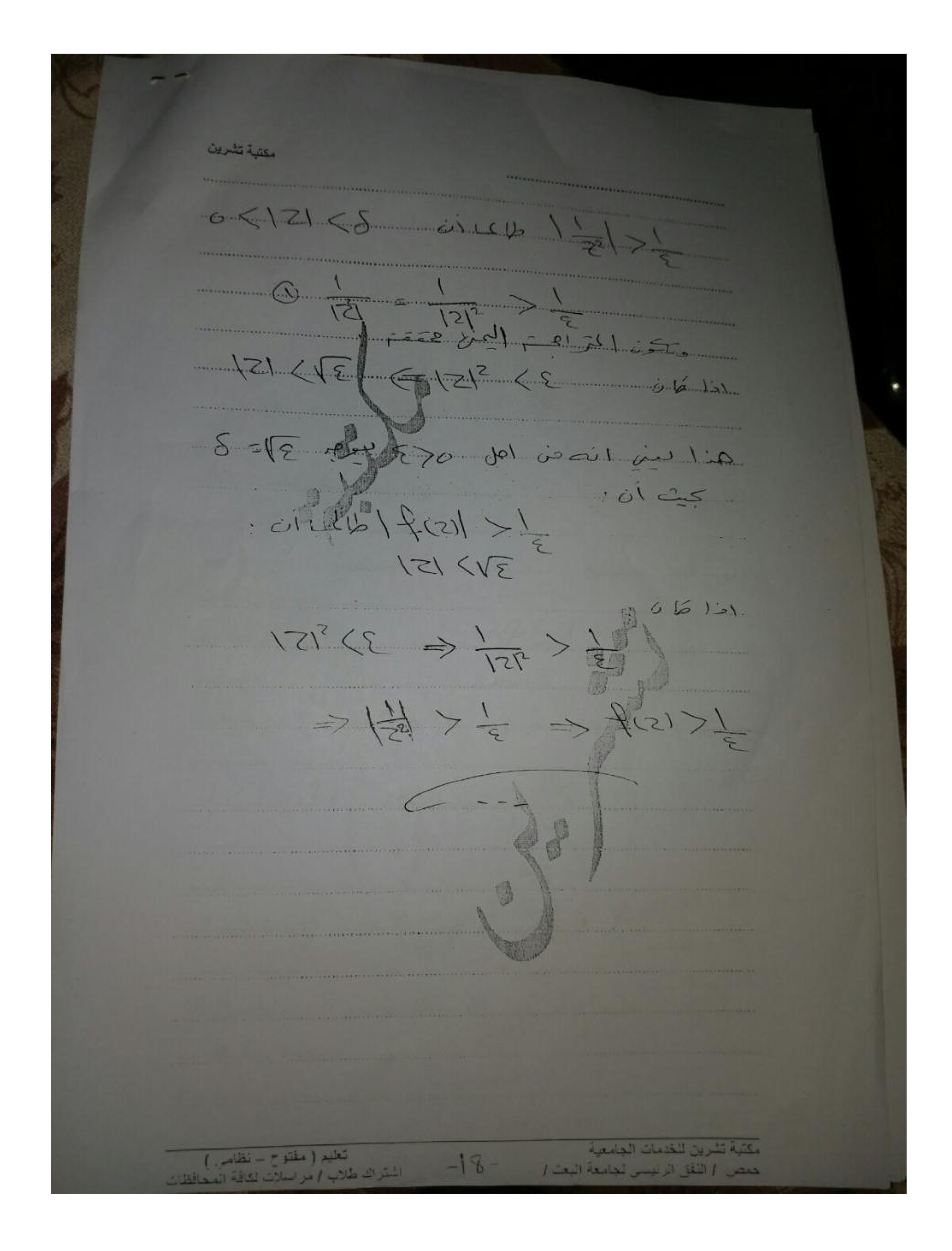
$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$ طالما أن $|z| > \frac{1}{\delta}$

مثال:

أثبت أن $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^2} = 0$

الحل: لنثبت أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن:

صورة



$\left|\frac{1}{z^2}\right| > \frac{1}{4}$ طالما أن $0 < |z| < \delta$

① $\frac{1}{|z|} = \frac{1}{|z|^2} > \frac{1}{4}$

فتكون المتراجحة اليمنى محققة

اذا كان $|z|^2 < 4 \Rightarrow |z| < \sqrt{4}$

هذا يعني انه من اجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \sqrt{4}$

بحيث أن:

$|f(z)| > \frac{1}{4}$ طالما أن: $|z| < \sqrt{4}$

اذا كان

$|z|^2 < 4 \Rightarrow \frac{1}{|z|^2} > \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{z^2}\right| > \frac{1}{4} \Rightarrow |f(z)| > \frac{1}{4}$